グラフ処理のアルゴリズムに関する研究

著者	山下 晶
号	624
発行年	1977
URL	http://hdl.handle.net/10097/9360

氏　　　　名	山 下　晶 (やま した　あきら)
授 与 学 位	工 学 博 士
学位授与年月日	昭和 52 年 7 月 6 日
学位授与の根拠法規	学位規則第 5 条第 1 項
研究科，専攻の名称	東北大学大学院工学研究科 （博士課程）電気及通信工学専攻
学 位 論 文 題 目	**グラフ処理のアルゴリズムに関する研究**
指 導 教 官	東北大学教授　木村　正行
論 文 審 査 委 員	東北大学教授　木村　正行　東北大学教授　斎藤　伸自 東北大学教授　野口　正一　東北大学助教授　那須　正和 東北大学助教授　丸岡　章

論 文 内 容 要 旨

第 1 章　序　論

プログラムのグラフ的モデルとしてフローグラフが定義され，プログラムに関する種々の問題をフローグラフの問題として扱う研究が多くなされてきている。ここで，フローグラフというのは，プログラムの命令を節点と見なし，プログラムの実行の流れを向きを持った枝で表わした有向グラフである。特に，各サーキットに対して入口が 1 個しかないようなフローグラフを〝可約なフローグラフ〟とよぶ。実際のプログラムに対するフローグラフのほとんどは可約なフローグラフになっているので，可約なフローグラフはプログラムのグラフ的モデルとして重要なものである。

一方，グラフの問題に限らず種々の問題は，それを解くアルゴリズムの時間複雑さによって分

される。ここで，ある問題Ｐを解くアルゴリズムＡの時間複雑さというのは次のようなものである。問題Ｐに属する任意のサイズｎの入力をアルゴリズムＡが処理する時間の上界がある定数ｃに対して$c \cdot f(n)$であるとき，問題Ｐを解くアルゴリズムＡの時間複雑さは$O(f(n))$（オーダーｆ（ｎ））であるという。ここで，Ｐをグラフの問題とするなら，入力のサイズとは，グラフの節点または枝の総数である。このアルゴリズムの時間複雑さによる問題の分類によって“ＮＰ－完全な問題のクラス”という重要な概念が導入されている。このＮＰ－完全な問題のクラスについては，そのクラスに属する全ての問題に対して，指数関数のオーダーの時間複雑さ（たとえば$O(2^n)$など）で解くアルゴリズムが存在するが，そのクラスに属するどの問題に対しても，多項式関数のオーダーの時間複雑さ（たとえば$O(n)$，$O(n^2)$など）で解くアルゴリズムは存在しないと考えられている。また，ある問題を解くアルゴリズムの時間複雑さが指数関数のオーダーであるということは，実際にコンピューターでその問題を解くときの実行時間を考えると，入力のサイズが大きくなるにしたがって膨大な実行時間を要することになり，現実的には解くことができない。したがって，ＮＰ－完全な問題というのは，今のところ現実的には解けない問題であるといってもよい。このことから，ＮＰ－完全な問題に対して，近似的な解を見つける研究や，それらの問題が対象とする領域に制限をつけることによって，多項式関数のオーダーの時間複雑さを持ってアルゴリズムで解こうとする研究などが多くなされるようになってきている。

本論文は，上記のプログラムのグラフ的モデルとして重要な可約なフローグラフを対象として種々のグラフ処理のアルゴリズムに関する研究をまとめたものである。この研究により，可約なフローグラフのクラスにおいては，一般の有向グラフのクラスにおいてＮＰ－完全ないくつかの問題が，多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムによって解けることが明らかとなる。また，可約なフローグラフのクラスに限定してもＮＰ－完全な問題があることも明らかとなる。

第２章　可約なフローグラフ

この章では，本論文を通して考察の対象となる可約なフローグラフについて述べ，さらに，本論文において重要である諸概念の定義とこれらについてすでに知られている結果について述べる

第３章　可約なフローグラフの最小帰還点集合問題

この章では，可約なフローグラフのクラスにおける最小帰還点集合問題について考察する。有向グラフＧの最小帰還点集合というのは，節点の集合で，Ｇの任意のサーキット上の少くとも１個の節点を含むもののうち，節点の個数が最小のものである。また，最小帰還点集合問題というのは，任意の有向グラフＧと整数$k \geq 1$が与えられたとき，Ｇの最小帰還点集合の節点の個数が

k以下であるかどうかを決定する問題である。3.2節では，この問題が一般のフローグラフのクラスにおいてNP－完全であることを述べ，3.3節では，2.3節で述べたフローグラフの部分グラフであるインターバルの性質を一般化した結果について述べる。この結果は3.4節で与えるアルゴリズムの正当性を示すために用いられる。3.4節では，可約なフローグラフのクラスにおいて$O(|V|\cdot|E|)$の時間複雑さで最小帰還点集合問題を解くアルゴリズムを示す。ここで，$|V|$と$|E|$はそれぞれ節点と枝の総数である。このアルゴリズムの手法は，与えられたフローグラフGからインターバル解析によって次々に導出されるグラフを作りながら最小帰還点集合の元を決めてゆき，もしGが可約ならGの最小帰還点集合を出力し，Gが可約でないなら可約でないと出力して停止する。この結果は，最小帰還点集合問題を多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムによって解くことができる有向グラフの部分クラスとして可約なフローグラフのクラスを始めて見つけたということで意義がある。最小帰還点集合問題は，プログラムの正当性を証明するためのveritication conditionの個数を最小にしたり，リカーシブ・コールのコールの関係を簡単化したり，デッド・ロックの回避のために中止すべきプロセスの個数を最小にしたりする上で生じており，本論文の結果はこれらの研究に有用であると思われる。

第4章　可約なフローグラフの最小被覆道集合問題

この章では，可約なフローグラフのクラスにおける最小被覆道集合問題について考察する。最小被覆道集合というのは，共通な節点を持たない道の集合で，グラフの各節点がそれらの道のいずれか1つの上にあるようなもののうち，道の個数が最小となるものである。また，最小被覆道集合問題というのは，任意の有向グラフGと整数$k\geq 1$が与えられたとき，Gの最小被覆道集合の道の個数がk以下であるかどうかを決定する問題である。4.2節では，フローグラフのいくつの部分クラスと最小被覆道集合に関する定義を述べる。4.3節では，最大安定集合問題（任意の無向グラフGと整数$k\geq 1$が与えられたとき，Gにおいて互いに隣接しない節点の個数の最大値がk以上であるかどうかを決定する問題）が，各節点の次数が全て3である無向グラフのクラスRU_3においてNP－完全であることを示す。4.4節では，RU_3における最大安定集合問題が，次の条件

1. 各節点に入る枝の個数と各節点から出る枝の個数がともに高々2である。
2. 各サイクルの長さが2である。
3. 各サイクルにその外部から入る枝の個数が1で，かつ各サイクルからその外部に出る枝の個数が2である。

を同時に満すフローグラフのクラスR_2^1における最小被覆道集合問題に変換可能であることを示し，4.3節の結果からR_2^1における最小被覆道集合問題がNP－完全であることを示す。このこ

とから，ランクが2以下の可約なフローグラフのクラスにおいても最小被覆道集合問題がNP－完全であることが示される。4.5節では，条件1，2を満しかつ条件3の代りに次の条件

3′ 各サイクルにその外部から入る枝の個数が高々1で，各サイクルからその外部に出る枝の個数が高々2で，条件3のようなサイクルを含まない。

を満すフローグラフのクラスR_2^2とR_2^2を少し拡張したクラスR_2^3においては，$O(|E|)$の時間複雑さで最小被覆道集合を見つけるアルゴリズムを示す。4.6節では，ランクが1である可約なフローグラフのクラスにおいて，$O(|E|\cdot\sqrt{|V|})$の時間複雑さで最小被覆道集合を見つけるアルゴリズムを示す。最小被覆道集合問題は，プログラムのGO TO文の個数を最小にすることと密接な関係にあり，最小被覆道集合問題が多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムによって解けるいくつかのクラスがすでに報告されている。

第5章　可約なフローグラフのハミルトン道問題

この章では，可約なフローグラフのクラスにおける開始点を出発点とするハミルトン道問題と，可約なフローグラフのクラスにおけるハミルトン・サーキット問題について考察する。ここで，ハミルトン道というのは，グラフの全ての節点をちょうど1回ずつ通る道であり，ハミルトン道問題というのは，任意にグラフが与えられて，そのグラフにハミルトン道があるかないかを決定する問題である。また，ハミルトン・サーキットというのは，グラフの全ての節点をちょうど1回ずつ通るサーキットで，ハミルトン・サーキット問題というのは，任意にグラフが与えられて，そのグラフにハミルトン・サーキットがあるかないかを決定する問題である。

この章では，フローグラフの開始点を出発点とするハミルトン道問題が一般のフローグラフのクラスにおいてはNP－完全であるが，可約なフローグラフのクラスにおいて$O(|E|)$の時間複雑さを持つアルゴリズムによって解けることを示す。また，ハミルトン・サーキット問題も可約なフローグラフのクラスにおいて$O(|E|)$の時間複雑さを持つアルゴリズムによって解けることを示す。ハミルトン道問題は最小被覆道集合問題の特殊な場合である。また，ハミルトン道問題は順序機械の故障診断やプログラムの誤りの検出などを行う上で生じており，本論文の結果はこれらの研究に有用であると思われる。

第6章　結　　　論

本論文では，プログラムのグラフ的モデルのうちで特に重要な可約なフローグラフを対象として，種々のグラフ処理のアルゴリズムに関する研究を述べた。特に，一般の有向グラフのクラスにおいてNP－完全な問題が可約なフローグラフのクラスにおいてもNP－完全なのか，それとも多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムによって解くことができるのかという

ことに重点をおいており，このような研究はグラフ処理の問題を実際にコンピューターで解こうとするときの重要な指針となるものである。すなわち，もしある問題があるグラフのクラスにおいてＮＰ－完全であるなら，グラフのサイズが大きくなった場合に計算時間が膨大なものとなるから現実的には解くことができず，問題の対象となるグラフのクラスに制限を課したり，近似的な解を求めることを考えなくてはならない。

今後の研究としては，可約なフローグラフのクラスにおいて多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムで解ける種々の問題を見つけることと，本論文で考察したそれぞれの問題が多項式関数のオーダーの時間複雑さを持つアルゴリズムで解けるグラフのクラスを拡張することなどが考えられる。

審 査 結 果 の 要 旨

情報処理に関する多くの問題は，グラフ処理の問題に帰着される。そこで，グラフ処理を効率よく行うためのアルゴリズムに関する研究が，最近，注目を集めるようになった。著者は，プログラムの最適化等に重要なフローグラフ処理の問題に着目し，特に，実際のプログラムのフローグラフの多くが属している可約なフローグラフのクラスを対象として，効率のよいグラフ処理のアルゴリズムに関する研究を行った。本論文はその成果をまとめたもので，全編6章よりなる。

第1章は序論である。第2章では，可約なフローグラフなどに関する諸定義，アルゴリズムの時間複雑さやNP－完全性などの諸概念，および本論文で考察するグラフ処理問題などについて述べている。

第3章では，一般のフローグラフのクラスに対しては，NP－完全である最小帰還点集合問題について考察し，フローグラフが可約であるという条件のもとでは，節点および枝の個数を変数とする多項式で表される時間でこの問題を解くアルゴリズムを与えている。これは注目すべき知見である。

第4章では，可約なフローグラフのクラスに対する最小被覆道集合問題について考察している。まず，このクラスのフローグラフに対して，各サイクルの長さが2であり，各サイクルに入る枝の個数が1でかつそれから出ていく枝の個数が2という強い制限を加えても，この問題はNP－完全であることを証明し，この結果からランクが2の可約なフローグラフのクラスに対しは，この問題はNP－完全であることを明らかにしている。また，ランクが1の可約なフローグラフのクラスに対しては，節点および枝の個数を変数とする多項式で表される時間でこの問題を解くアルゴリズムを与えている。これらの成果は最小被覆道集合問題のNP－完全性の本質をかなり明確にしたもので，すぐれた知見である。

第5章では，フローグラフの開始点を出発点とするハミルトン道問題を考察し，一般のフローグラフのクラスに対してはNP－完全であるこの問題も，可約なフローグラフのクラスに対しては枝の個数に比例する時間で解けることを示している。第6章は結論である。

以上要するに本論文は，一般のフローグラフのクラスに対してはNP－完全な種々の問題が，可約なフローグラフのクラスに対して，どのような時間複雑さを持つアルゴリズムによって解けるかを解明し，グラフ処理のアルゴリズムの設計に有用な知見を加えたもので，情報工学の発展に寄与するところが少なくない。

よって，本論文は工学博士の学位論文として合格と認める。